Лабораторная работа N3

Маятник Максвелла

Протокол измерений

Студент группы

Преподаватель Царев Ю. Н.

Параметры установки.

Прибор	Цена деления	Погрешность
Маятник Максвелла	0,001 с	0,001 с

Радиус оси: 5 мм

Радиус нити: 0,6 мм

Радиус диска – $R_D = 42,5$ мм

Внешний радиус кольца ~~к~~ $R_{к} = 52,3$ мм

~~Внешний~~ Масса кольца 1 $m_1 = 254$ г.

Масса кольца 2 $m_2 = 390$ г.

Масса диска $m = 132$ г.

Результаты измерений

Кольцо 1	t, c	1,782	1,779	1,809	1,798	1,756	1,839	1,798	1,786
Кольцо 2	t, c	1,863	1,864	1,863	1,880	1,885	1,867	1,870	1,882
Кольцо 1	t, c	1,804	1,787						
Кольцо 2	t, c	1,897	1,882						

Цель работы:

- определение момента инерции маятника Максвелла

2. Описание лабораторной установки.

Рис. Внешний вид лабораторной установки

1. вороток для крепления и регулировки бифилярного подвеса
2. электромагнит для фиксирования маятника в верхнем положении
3. фотодатчик, включающий секундомер
4. Фотодатчик, выключающий секундомер
5. шкала секундомера

Параметры установки

Радиус оси: $R_{оси} = 5$ мм

Радиус нити: $R_{нити} = 0,6$ мм

Радиус диска $R_1 = 42,5$ мм

Внешний радиус кольца $R_2 = 52,5$ мм

Масса диска $m_D = 132$ г.

Масса первого кольца $m_1 = 254$ г

Масса второго кольца $m_2 = 390$ г

Масса стержня $m_{ст} = 34$ г.

Таблица технических характеристик приборов

Прибор	Тип	Предел измерений	Цена деления	Систематическая Погрешность
Секундомер	МК-2	99,999 с	0,001 с	0,001 с

3. Рабочие формулы

1. $t_{ср} = \frac{(t_1 + t_2 + ... + t_N)}{N}$, где $t_{ср}$ - среднее значение времени падения; t_1 - время падения при первом измерении; t_N - время падения при последнем измерении; N - количество измерений

2. $I = m \cdot (r + r_н)^2 \left(\frac{gt^2}{2h_0} - 1\right)$, где I - момент инерции маятника Максвелла; m - масса маятника; r - радиус оси маятника; $r_н$ - радиус нити; g - ускорение свободного падения; t - время падения маятника, h_0 - высота падения маятни

3. $I_D = \frac{m_D R_D^2}{2}$, где I_D – момент инерции диска; m_D – масса диска; R_D – радиус диска.

4. $I_K = \frac{m_K (R_{K1}^2 + R_{K2}^2)}{2}$, где I_K – момент инерции кольца; R_{K1} – внутренний радиус кольца; R_{K2} – внешний радиус кольца

5. $I_{теор} = \frac{m_D R_1^2 + m_K (R_1^2 + R_2^2)}{2}$, где $I_{теор}$ – теоретическое выражение для маятника Максвелла; R_1 – радиус диска; R_2 – внешний радиус диска

4. Результаты измерений и вычислений

Таблица измерений

№ кольца		№ измерения										$t_{ср}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	t, c	1,782	1,779	1,809	1,798	1,756	1,839	1,798	1,786	1,804	1,787	1,794
2	t, c	1,863	1,864	1,863	1,880	1,885	1,867	1,870	1,882	1,897	1,882	1,875

$h_0 = 32$ см

	$t_{ср}$, с	кг·м², I измерений	Погрешность систем
Кольцо 1	1,794	$7,1 \cdot 10^{-4}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$
Кольцо 2	1,875	$9,2 \cdot 10^{-4}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$

5. Примеры вычислений

По формуле (1)

$$t_{к1ср} = \frac{1,782+1,779+1,809+1,798+1,756+1,839+1,798+1,786+1,804+1,787}{10} =$$

$= 1,794$ с

$t_{к2ср} = 1,875$

По формуле (2)

$$I_1 = 0,42 \cdot 0,0056^2 \cdot \left(\frac{9,82 \cdot 1,794^2}{2 \cdot 0,32} - 1\right) = 0,00069 =$$
$$= 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_2 = 0,00092 = 9,2 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

По формуле (5)

$$I_{теор} = \frac{0,132 \cdot 0,0425^2 + 0,254(0,0125^2 + 0,0525)}{2} =$$

$$= 0,00071 = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

6. Вычисление погрешностей

3) ~~St~~ $\theta t = 0,0001$ с 2) $\theta h = 0,002$ м

$$\theta_I = \left|\frac{\partial I}{\partial t}\right| \cdot \theta t + \left|\frac{\partial I}{\partial h}\right| \cdot \theta h$$

$$I'_t = \frac{m_{cp}(r+r_H)^2 \cdot 2g t_{cp}}{2h_0}$$, где $m_{cp} = \frac{M_1+M_2}{2} = 0,488$ кг

$$t_{ср} = \frac{t_{к_1ср} + t_{к_2ср}}{2} = 1,8345с$$

Вынесем константу

$$C = \frac{m_{ср}(r+r_н)^2 \cdot g}{2h_0} = \frac{0,488\,(0,005+0,006)^2 \cdot 9,8}{0,64} = 0,000234$$

$$I'_t = C \cdot 2t_{ср} = 0,0088$$

$$I'_t = ~~C \cdot 2t_{ср} = 0~~, \quad \frac{m_{ср}(r+r_н)^2 \cdot g\, t_{ср}^2}{2 \cdot h_0^2} = C\frac{t_{ср}^2}{h_0} = 0,0031$$

$$\theta_I = 0,0088 \cdot 0,001 + 0,0031 \cdot 0,002 = 0,00002\ кг \cdot м^2 =$$

$$= 0,2~~3~~ \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$$

7. Вывод:

В случаях с тяжелыми и легкими кольцами момент инерции расчётный совпадает с измеренным, отличаясь лишь на погрешность:

$$I_{теор} = (7,1 \cdot ~~10^{-4}~~ \pm 0,2) 10^{-4}\ (кг \cdot м^2) \checkmark$$

$$I_{изм} = (9,2 \cdot ~~10^{-4}~~ \pm 0,2) 10^{-4}\ (кг \cdot м^2) \checkmark$$

Лабораторная работа № 3

МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Цель работы: определение момента инерции маятника Максвелла.

Теоретические сведения

Маятник Максвелла (рис. 3.1) представляет собой диск, жестко насаженный на стержень и подвешенный на двух параллельных нерастяжимых нитях. Намотав нити на стержень, можно сообщить маятнику потенциальную энергию относительно его нижнего положения. Если маятник отпустить из верхнего положения, то, вращаясь, он начнет падать. Учитывая, что на маятник действуют только консервативные силы (сила тяжести и сила натяжения нитей), закон сохранения его механической энергии можно записать в виде:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh = mgh_0, \tag{3.1}$$

где h_0 – начальная высота маятника, определяющая его полную энергию; h – текущая высота; m – масса маятника; I – момент инерции маятника относительно его оси; ω – угловая скорость вращения относительно этой оси; υ – скорость центра масс; g – ускорение свободного падения. Начало отсчета поместим в нижней точке.

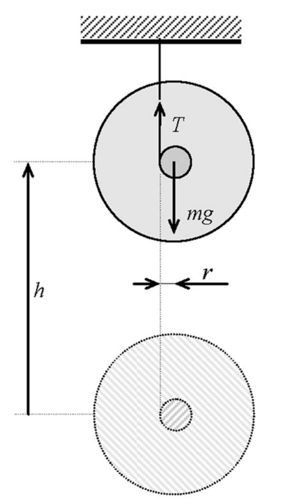


Рис. 3.1. Маятник Максвелла

Радиус-вектор $\vec{h}$, проведенный из этой точки в центр масс маятника, будет направлен вертикально вверх. Поскольку ускорение свободного падения направлено вертикально вниз, произведение скалярных величин можно заменить скалярным произведением векторов

$$mgh = -m\vec{g}\cdot\vec{h}.$$

Известно также, что $\omega^2 = (\upsilon/r)^2$, где r – радиус стержня, и что $\upsilon^2 = \vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}$. С учетом сделанных замечаний (3.1) переписывается в виде

$$\frac{1}{2}m\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} + \frac{I}{2r^2}\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} - m\vec{g}\cdot\vec{h} = m\vec{g}\cdot\vec{h}_0. \qquad (3.2)$$

Дифференцируем получившееся уравнение по времени и получаем

$$m\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{I}{r^2}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - m\vec{g}\frac{d\vec{h}}{dt} = 0. \qquad (3.3)$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{\upsilon}$, $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение центра масс, перепишем уравнение (3.3) в виде

$$mr^2\vec{\upsilon}\cdot\vec{a} + I\vec{\upsilon}\cdot\vec{a} = mr^2\vec{\upsilon}\cdot\vec{g}. \qquad (3.4)$$

Все векторы в (3.4) направлены одинаково, поэтому перейдем от скалярных произведений к произведениям длин векторов. Делим все члены уравнения на модуль скорости и получаем $mr^2a + Ia = mr^2g$, или

$$I = mr^2(g/a - 1). \qquad (3.5)$$

Поскольку величины I, m и r для маятника Максвелла постоянны, ускорение маятника будет тоже постоянным. Найти его можно, измерив время падения t с высоты h_0

$$a = \frac{2h_0}{t^2}. \qquad (3.6)$$

Подставив (3.6) в (3.5), получим выражение для вычисления момента инерции маятника Максвелла

$$I = mr^2\left(\frac{gt^2}{2h_0} - 1\right). \qquad (3.7)$$

В этой формуле не учтена толщина нити, которая наматывается на ось маятника. В реальных условиях ее нужно обязательно учитывать. На рис. 3.2 показано, что сила натяжения T приложена

не краю шкива, а к середине нити. Поэтому, радиус шкива r следует заменить суммой $r + r_н$, где $r_н$ – радиус нити.

$$I = m\left(r + r_{\text{Н}}\right)^2 \left(\frac{gt^2}{2h_0} - 1\right). \qquad (3.8)$$

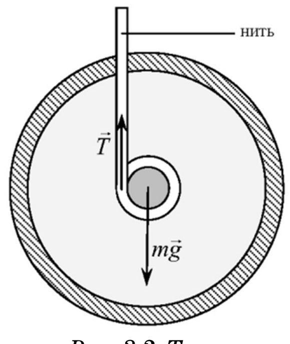


Рис. 3.2. Точки приложения сил

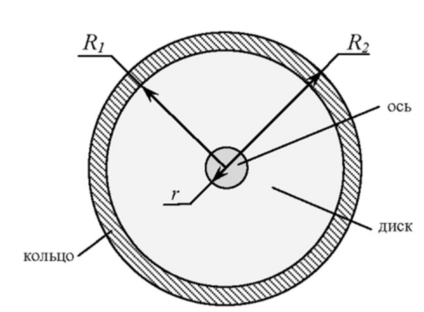


Рис. 3.3. Размеры элементов маятника

Маятник Максвелла (рис. 3.3) состоит из трех элементов: оси вращения, диска и кольца. Поэтому его момент инерции складывается из моментов инерции этих трех элементов:

$$I = I_0 + I_D + I_K. \qquad (3.9)$$

Момент инерции оси ввиду его малости учитывать не будем. Моменты инерции диска и кольца можно найти по формулам:

$$I_D = \frac{m_D R_D^2}{2}; \quad I_K = \frac{m_K}{2}\left(R_{K1}^2 + R_{K2}^2\right). \qquad (3.10)$$

Принимая во внимание, что $R_{K1} = R_D = R_1$, а $R_{K2} = R_2$, получаем теоретическое выражение для момента инерции маятника Максвелла

$$I = \frac{1}{2}\left(m_D R_1^2 + m_K\left(R_1^2 + R_2^2\right)\right). \qquad (3.11)$$

Лабораторная установка

Внешний вид лабораторной установки показан на рис. 3.4. На вертикальной стойке крепятся два кронштейна. Верхний неподвижный кронштейн снабжен воротком 1 для крепления и регулировки бифилярного подвеса, электромагнитом 2 для фиксировании маятника в верхнем положении и фотодатчиком 3, включающий секундомер. На подвижном кронштейне закреплен фотодатчик 4, выключающий секундомер. Шкала секундомера 5 вынесена на лицевую панель прибора.

Кнопка "Сеть" включает питание установки, кнопка "Сброс" обнуляет показания секундомера. При нажатии на кнопку "Пуск" отключается электромагнит, и маятник приходит в движение.

Массу и момент инерции маятника можно менять при помощи сменных колец, надеваемых на диск. Длина нити должна быть такой, чтобы нижняя кромка маятника была на 1–2 мм ниже оптической оси нижнего фотодатчика. Ось маятника должна быть горизонтальной. Длина нити (высота падения) определяется по шкале, нанесенной на вертикальной стойке.

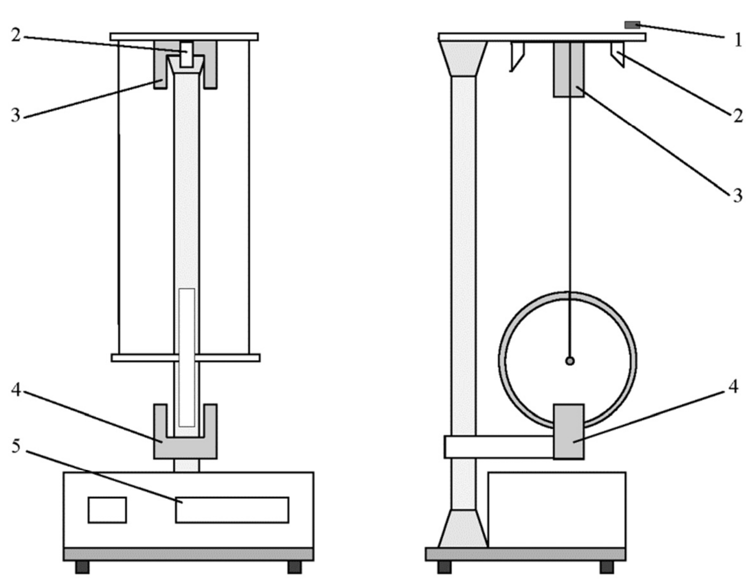


Рис. 3.4. Внешний вид лабораторной установки

Параметры установки:
радиус оси – 5 мм,
радиус нити – 0,6 мм,
радиус диска – $R_1 = 42{,}5$ мм,
внешний радиус кольца – $R_2 = 52{,}5$ мм.

Значения остальных параметров указаны на элементах маятника.

Задания и порядок их выполнения

Задание 1. Экспериментальное определение момента инерции маятника Максвелла (стандартный опыт).

Провести измерение времени падения маятника не менее 10 раз. Вычислить среднее время падения, а по нему при помощи формулы (3.8) момент инерции. Провести стандартную обработку результатов измерений. Погрешность измерения высоты принять равной $\theta_h = 2$ мм, погрешность измерения времени $\theta_t = 0{,}001$ с.

Внимание! При проведении опыта нужно следить за тем, чтобы нить наматывалась на ось аккуратно в один слой. Опыты, в которых это условие не соблюдается, в дальнейшем не учитывать.

Описанная выше процедура является стандартным опытом в данной работе. Ее нужно провести для маятника с каждым из сменных колец.

Задание 2. Исследование зависимости момента инерции маятника Максвелла от высоты, с которой происходит его падение.

Для указанного преподавателем кольца провести стандартный опыт для трех разных высот h. Экспериментально убедиться в том, что момент инерции маятника не зависит от начальной высоты, и в отчете объяснить, почему. Получить среднее значение момента инерции маятника по результатам трех серий, проведенных при разных высотах.

При проведении математической обработки результатов измерений в первом и втором заданиях нужно исходить из того, что момент инерции является неслучайной величиной.

Задание 3. Теоретический расчет момента инерции маятника Максвелла.

По формулам (3.10), (3.11) вычислить моменты инерции диска, колец и маятника в целом во всех случаях. Сравнить расчетные значения с измеренными и объяснить расхождения, если они возникнут.

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции абсолютно твердого тела?
2. Чему равны моменты инерции диска и кольца?
3. Чему равна кинетическая энергия абсолютно твердого тела?
4. Запишите закон сохранения энергии для маятника Максвелла.
5. Является ли падение маятника равноускоренным?
6. Почему, опустившись до нижней точки, маятник снова начинает подниматься наверх?
7. Какая энергия маятника больше – кинетическая поступательного движения или кинетическая вращения? (При ответе на этот вопрос воспользоваться полученным значением момента инерции маятника и известным значением радиуса оси маятника.)
8. Как зависит время падения маятника Максвелла от его массы?
9. Как изменится время падения, если маятник выполнить из менее плотного, чем сталь материала (например, алюминия)?